Matematikkens og Rummets natur

Den græske matematiker Euklid udformede grundlaget for den traditionelle geometri. Med opdagelsen af såkaldt ikke-euklidisk geometri blev det klart, at uanset det fysiske rums natur er der flere forskellige slags geometrier, som rent matematisk alle er lige konsistente. Matematikken blev dermed løsrevet fra den fysiske virkelighed.

Den græske matematiker Euklid grundlagde den traditionelle geometri. Her er han afbilledet på en fresko af Raffael.

Af Jesper Lützen

Indtil sidste halvdel af 1800-tallet blev matematik og specielt geometri anset for at være en abstrakt teori for den fysiske virkelighed. Vi skal i denne artikel se, hvordan opdagelsen (opfindelsen) af den såkaldte ikke-euklidiske geometri radikalt ændrede denne opfattelse og gjorde matematikken principielt uafhængig af virkeligheden. Men samtidigt ledte de nye ideer om geometri til en revolution i vores opfattelse af det fysiske rum.

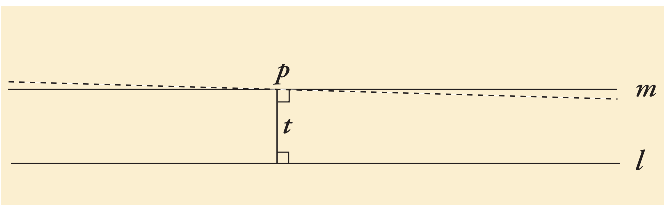
Denne omvæltning i matematikkens og specielt geometriens selvforståelse var et resultat af, at matematikere insisterer på stringente beviser for deres resultater. Dette særkende ved matematikken har vi arvet. fra de antikke græske matematikere bl.a. fra Euklid, hvis *Elementer* (ca. 300 f.Kr) i 2000 år blev anset for det fornemste eksempel på matematisk argumentation. Euklid indleder sine Elementer med 23 definitioner, 5 postulater og 5 almindelige begreber (se boks)

Postulater og almindelige begreber er hvad man i dag under ét kalder aksiomer eller ubeviste grundsætninger. Men hvad skal en deduktiv videnskab som matematik med ubeviste aksiomer? Det forklarede den græske filosof Aristoteles udmærket: Når vi beviser en sætning må beviset bygge på andre sætninger. Beviset for disse må igen bygge på endnu andre og så videre. For at vi ikke skal ende i en uendelig regres, eller i en cirkelslutning, må vi altså starte med nogle sætninger, som ikke bevises. Det er postulaterne og de almindelige begreber.

Parallelpostulatet

Men hvorfor deler grækerne deres aksiomer op i to klasser? Her giver Aristoteles to svar. For det første omhandler postulaterne en speciel gren af videnskaben, her geometrien, hvorimod de almindelige begreber er almene. For eksempel gælder de to almindelige begreber nævnt i boksen ikke kun om geometriske størrelser, men også om tal og alle andre størrelser. For det andet, og det er mere interessant for os, så siger Aristoteles, at de almindelige begreber er selvindlysende, medens postulaterne ikke er det, ja visse personer vil måske anfægte deres rigtighed.

Denne karakterisering passer udmærket på det 5. postulat, det såkaldte *parallelpostulat*. Man kan ud fra Euklids første fire postulater vise, at hvis man fra et givet punkt *P* nedfælder en linie *t* vinkelret på en anden given linie *l* (figur 1) og dernæst i *P* oprejser den vinkelrette *m*, så vil denne være parallel med *l*. Med andre ord, de to linier *l* og *m* vil ikke skære hinanden, uanset hvor langt de forlænges.



Figur 1. Ud fra Euklids første fire postulater, kan man vise, at linierne m og l vil være parallelle i situationen vist på figuren. Men hvad sker der, hvis man kun vipper linien m ganske lidt omkring punktet p?

Men hvad nu hvis vi vipper m en lille smule om punktet P? Jo, så bliver summen af de to vinkler på den ene eller på den anden side af transversalen t mindre end to rette vinkler, og så siger parallelpostulatet at m og l vil skære hinanden. Men det er vel ikke helt selvindlysende, at de to linier vil komme til at skære hinanden, hvis vi bare vipper linien m meget lidt. I hvert fald må skæringspunktet falde meget langt ude. Og det må have givet anledning til et problem for grækerne, hvis verdensbillede opererede med et endeligt univers, som kun strakte sig ud til fiksstjernesfæren. For hvad nu, hvis vi kun vipper så lidt, at skæringspunktet mellem linierne falder uden for universet? Så må vi vel sige, at det ikke findes. Og dog siger postulatet, at det findes.

Men hvis postulaterne er betvivlelige eller ligefrem usande, hvilken status har postulaterne da i græsk filosofi? For Platon er de sande udsagn om en idealverden, en uforanderlig perfekt verden, som vores varierende skinverden kun er en skygge af. For Aristoteles er postulaterne sande udsagn om abstrakte objekter, som vi får ved at abstrahere uvæsentlige ting væk fra de virkelige fysisk eksisterende objekter.

Et genstridigt postulat

Euklid indså altså, at han behøvede et postulat i stil med parallelpostulatet, for at kunne deducere den sædvanlige geometri (euklidisk geometri). Det synes vi i dag var en genistreg. Men i Euklids samtid var der heftig debat om parallelteorien, og i de efterfølgende 2000 år blev parallelpostulatet ofte fremhævet som en plet på Euklids ellers perfekte bygningsværk. Mange matematikere mente, at man kunne undvære postulatet, idet de troede, at de kunne bevise det som en sætning ud fra de øvrige 4 postulater. Grækerne forsøgte sig, Araberne i Middelalderen forsøgte sig, og da Euklid begyndte at blive oversat til Latin i Renæssancen prøvede de europæiske oversættere også. Beviserne byggede ofte på en ny definition af parallelle linier som linier, der overalt har samme afstand. Dette kunne synes som en uskyldig ændring, men når de nævnte matematikere så antager, at der *findes* parallelle linier, så har de faktisk lavet en antagelse, som er ækvivalent med parallelpostulatet. Andre matematikere gjorde (ofte implicit) brug af andre egenskaber, som kunne synes mere oplagte end parallelpostulatet. For eksempel viste Wallis omkring 1650, at hvis der blot eksisterer to ligedannede trekanter (trekanter med samme vinkler) af forskellig størrelse, så kan parallelpostulatet bevises.

Det mest vidtgående bevisforsøg blev gjort af den italienske Jesuit Saccheri i 1733. men selv om mange matematikere både før og efter Saccheri kunne overbevise sig selv om, at de havde bevist parallelpostulatet, så blev ingen af beviserne generelt accepteret.

Ikke-Euklidisk geometri

Omkring 1820 var der mindst tre matematikere, C.F. Gauss, N.I. Lobachevsky og J. Bolyai, som uafhængigt kom til den konklusion, at parallelpostulatet ikke kan bevises, og at der derfor findes en geometri, hvori postulatet ikke gælder. I sådan en geometri kan man altså vippe linien m (figur 1) lidt, *uden* at den vil skære l. Der vil da være flere linier gennem P, som ikke skærer l, og specielt vil der være en "nederste" ikke skærende linie, som skiller de skærende fra de ikke skærende linier. Den kalder alle de tre matematikere for parallellen til l. Den nye geometri, som kaldes ikke-euklidisk geometri, har mange sære egenskaber. Vinkelsummen i en trekant er mindre end 180º, og arealet af trekanten er proportional med (180º – vinkelsummen). Det betyder, at små trekanter ligner euklidiske trekanter, medens vinkelsummen vil nærme sig nul for store trekanter. Ja der vil være en øvre grænse for arealet af en trekant. Der findes ingen ligedannede figurer af forskellig størrelse, så man kan altså ikke lave vinkeltro tegninger i reduceret størrelse (hvad der vil gøre det vanskeligt at være arkitekt i et stærkt ikke-euklidisk univers).

Mange af disse egenskaber ved ikke-euklidisk geometri var blevet opdaget før 1820, men hvor de tidligere matematikere havde anset disse egenskaber for paradoksale, og derfor havde afvist en sådan geometri, så mente Gauss, Lobachevsky og Bolyai ikke, at de var paradoksale. De var dog ikke i stand til at bevise, at ikke-euklidisk geometri var fri for indre modstrid. Det skete først omkring 1870. Med udgangspunkt i Gauss' fladeteori fra 1827 konstruerede den italienske matematiker E. Beltrami et afstandsmål på det indre af en cirkelskive, så geometrien på cirkelskiven er ikke-euklidisk. Dermed var det godtgjort, at ikke-euklidisk geometri er lige så konsistent som euklidisk geometri, i den forstand, at hvis euklidisk plangeometri ikke indeholder selvmodsigelser, så gør den ikke-euklidiske plangeometri det heller ikke. Den tyske matematiker B. Riemann viste endog noget lignende om rumgeometrien.

Rummets natur

Ovenstående historie kunne få læseren til at tro at de involverede matematikere kastede sig over parallelteorien udelukkende for at undersøge geometriens aksiomatiske fundament. Men hovedinteressen lå nok nærmere i de oplysninger man kunne få om rummets natur,

Euklids Elementer

Den græske matematiker Euklids værk *Elementer* blev i mere end 2000 år anset for et mønstereksempel på den såkaldt deduktive metode, hvor man udleder sine resultater ud fra teoridannelsens aksiomssystem ved hjælp af logikkens generelle slutningsregler. Denne metode blev udviklet i det antikke Grækenland.
Euklids Elementer består af 13 bøger, hvor den plane geometri behandles i Bog 1. Denne indledes med grundprincipperne i form af 23 definitioner, 5 postulater og 5 almindelige begreber.

Eksempler på Euklids *definitioner:*
1. Et punkt er det, som ikke kan deles.
2. En Linie er en længde uden bredde.
4. En ret linie er en linie, som ligger lige mellem punkterne på den.
23. Parallele er de rette linier, som ligger i samme plan og, når de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

Euklids første og det sidste *postulat:*
Lad det være forudsat:
1. At man kan trække en ret linie fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.
5. At, når en ret linie skærer to rette linier, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linier, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler ligger, der er mindre end to rette (se figur).

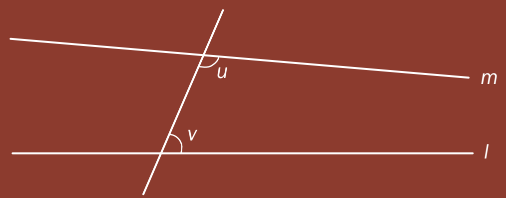
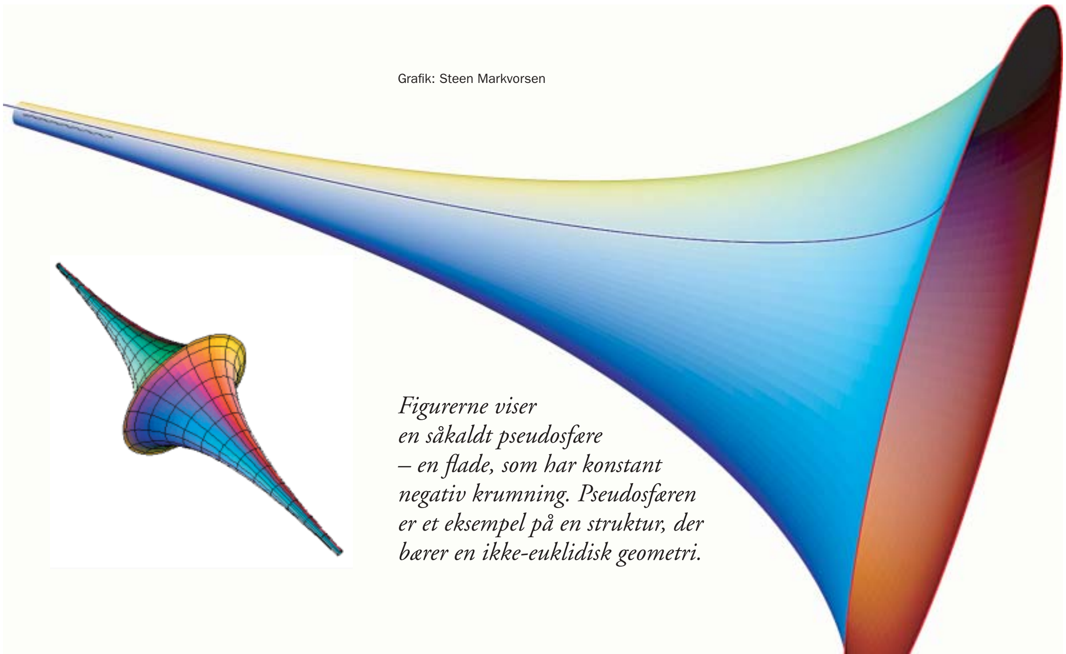


Illustration af Euklids 5. postulat – parallelpostulatet. Hvis vinklerne u og v tilsammen er mindre end 180°, vil linerne l og m skære hinanden.

Euklids to første *almindelige begreber:*
1. Størrelser, som er ligestore med den samme, er indbyrdes ligestore.
2. Når ligestore størrelser lægges til ligestore størrelser, er summerne lige store.



Figurerne viser en såkaldt pseudosfære – en flade, som har konstant negativ krumning. Pseudosfæren er et eksempel på en struktur, der bærer en ikke-euklidisk geometri.

altså egenskaberne ved det fysiske rum, som vi lever i. For at forstå disse overvejelser er det nødvendigt at se lidt på de erkendelsesteoretiske overvejelser, som tidens filosoffer gjorde sig om, hvordan man kan opnå sikker erkendelse. Fra 1600-tallet var der to skoler: rationalisterne og empiristerne. Rationalisterne, repræsenteret ved Descartes, mente at vore sanser ofte bedrager os, så man ikke ad den vej kan opnå sikker viden. Den kan kun opnås ad tankens vej (ved vor ratio).

Empiristerne, repræsenteret ved Lock og Hume afviste derimod, at vi blot ved tankens kraft kan opnå viden om verden omkring os. De mente, at al erkendelse må basere sig på

Den tyske matematiker C.F. Gauss var en af tre matematikere, der uafhængigt af hinanden kom frem til, at der måtte findes en såkaldt "ikke-euklidisk geometri."

sansning. Måske kan vi ikke få at vide, hvordan verden ser ud i sig selv, men vi kan erkende den sansede fænomenverden. Denne opfattelse delte Kant (1781), som påpegede det principielt umulige i at erkende "das Ding an sich". Han var også enig med empiristerne i, at al viden om verden "für uns" opnås via erfaring. Dog mente han ikke, at man kunne få noget ud af sansning, hvis ikke man før erfaringen havde nogle a priori anskuelsesformer og såkaldte kategorier, som kunne ordne erfaringerne. Rum og tid er a priori anskuelsesformer, og årsagssætningen (at enhver begivenhed må have en årsag) er et eksempel på en kategori. Ifølge Kant sanser vi i rum og tid, men vi sanser ikke rum og tid. Geometri, som bruges til at beskrive rummet, konstrueres i anskuelsen. Den er derfor ifølge Kant a priori (før erfaring), men da den udsiger noget om virkeligheden, er den også hvad han kalder syntetisk.

Opgør med Kant

Kants erkendelsesteoretiske synspunkter blev meget indflydelsesrige. Da Kant og hans samtid kun kendte til Euklidisk geometri, blev hans argument ofte læst som en kodificering af denne, og derfor som et argument for nødvendigheden af parallelpostulatet. Alle de tre "opfindere" af ikke-euklidisk geometri henviste eksplicit til Kants ideer, men afviste samtidigt den opfattelse, at geometrien er a priori. For eksempel skrev Gauss til Bessel: »Hvor tallet blot er et produkt af vores tanke har rummet altså en realitet uden for vores tanke, en realitet hvis love vi ikke kan foreskrive helt a priori«. Hvis vi ude i virkeligheden finder en trekant hvis vinkelsum er skarpt mindre end 180°, så må vi forkaste euklidisk geometri og godtage ikke-euklidisk geometri. På baggrund af målinger på store trekanter måtte Gauss og Lobachevski dog konkludere, at rummet tilsyneladende er euklidisk, inden for måleusikkerheden..

En mellemposition mellem kantianisme og empirisme blev formuleret omkring 1890-1900 af matematikeren Poincaré. Han argumenterede for, at vor beskrivelse af rummet er en konvention. Man kunne vælge at beskrive rummet med ikke-euklidisk geometri, men da euklidisk geometri er simplere vil vi altid vælge at beskrive rummet med euklidisk geometri.

Men hvad så med Gauss' argument: hvis vi i virkeligheden finder en trekant som har en vinkelsum som er mindre end 180°, så er vi vel tvunget til at forkaste euklidisk geometri? "Nej!", siger Poincaré. For når vi skal beskrive en trekant i virkeligheden skal vi fortælle, hvad de rette linier er. Hvis vi måler vinkler med et sædvanligt geodætisk eller astronomisk måleudstyr måler vi vinkler mellem lysstråler. Vi ser altså på en trekant hvis sider er lysstråler. Hvis vi så måler en vinkelsum forskellig fra 180°, kan vi enten konkludere, at geometrien ikke er euklidisk eller vi kan konkludere, at lyset ikke går langs rette linier. Poincaré mente, at vi altid ville og altid burde vælge den sidste udvej.

Einstein og rum-tiden

I slutningen af 1800-tallet og begyndelsen af 1900-tallet lavede fysikere faktisk eksperimenter, der stred mod den klassiske fysiks love, og fysikere som Lorentz prøvede at ændre på de fysiske love, så de kom i overensstemmelse med eksperimenterne. Einstein kom dog til den konklusion, at det var simplere også at ændre vores beskrivelse af rummet, eller rettere af rum-tiden. Han var enig med Poincaré i , at man ikke kan lave empiriske tests af rummet alene, men at man kun kan teste rum, tid og fysiske love i en samlet pakke. Han var dog ikke enig med Poincaré i, at det ville være simplest for enhver pris at beholde en euklidisk beskrivelse af rummet. I sin specielle, og senere i den generelle relativitetsteori argumenterede han for, at vores beskrivelse af verden som helhed bliver simplere, hvis vi beskriver rummet eller rettere rum-tiden ikke-euklidisk. Dermed endte århundreders overvejelser over geometriens og rummets natur med en revolution i vores opfattelse af den verden vi lever i.

Kant var enig med empiristerne i, at al viden om verden "für uns" opnås via erfaring.

Matematikkens natur

Diskussionerne af parallelpostulatet og ikke-euklidisk geometri førte også til en ændret opfattelse af matematikkens natur. Med opdagelsen af ikke-euklidisk geometri blev det klart, at uanset det fysiske rums natur var der flere forskellige slags geometrier, som ud fra et rent matematisk synspunkt alle var lige konsistente og værd at studere. Matematikken blev dermed løsrevet fra den fysiske virkelighed. Specielt kunne aksiomer ikke længere opfattes som selvindlysende eller sande udsagn om virkeligheden (eller om en ideel eller abstrakt virkelighed). Man kunne vælge at medtage parallelpostulatet eller dets negation, og i begge tilfælde få god matematik ud af det. Aksiomer blev dermed til "vilkårlige" udgangspunkter for vore matematiske ræsonnementer.

Også de matematiske objekters natur blev helt omfortolket omkring 1900. Det skete bl.a. i forbindelse med nye overvejelser over geometriens grundlag. Allerede 1500-tallets matematikere havde påpeget, at Euklid bruger flere "aksiomer" end dem, der er eksplicit formuleret i Elementerne, og med 1800-tallets forhøjede krav til stringent bevisførelse blev der behov for nye bøger om geometriens grundlag. Den mest indflydelsesrige

Matematikeren David Hilbert samt fysikeren Einstein var med til at ændre vores verdensopfattelse radikalt.

bog var Hilberts *Grundlagen der Geometrie* (1899). Den begynder med ordene: »Vi tænker tre forskellige systemer af ting. Tingene i det ene system kalder vi punkter….; tingene i det andet system kalder vi rette linier…; tingene i det tredje system kalder vi planer…..Vi tænker punkterne, linierne og planerne i visse relationer og betegner disse relationer med ord som "ligge", "mellem", "parallel", "kongruent", "kontinuert". Den nærmere, og for matematiske formål fuldstændige beskrivelse af disse relationer følger af geometriens aksiomer.« Derefter opremser Hilbert en lang række aksiomer.

Hilbert prøver altså slet ikke at definere matematikkens basale objekter som punkt, linie og plan, eller dens basale relationer som "ligge" osv. Her tager han konsekvensen af det faktum, som allerede var påpeget af Aristoteles, at ligesom man ikke kan bevise alt, kan man heller ikke definere alt.

Når Euklid definerer en ret linie som en linie, der ligger lige mellem punkterne på den, må man jo spørge, hvordan han definerer "lige". Konsekvensen er, at man som Hilbert må begynde med nogle udefinerede objekter, som udelukkende er fastlagt ved, at de skal opfylde aksiomerne. Som Hilbert en gang udtrykte det: man kunne lige så godt tale om stole, borde og ølkrus som om punkter, linier og planer. Hvorvidt matematiske objekter eksisterer er dermed blevet et spørgsmål, som kun lader sig besvare inden for et aksiomatisk system, og dér betyder det intet andet end konsistensen af systemet. Dermed har matematikeren omgået alle ontologiske spørgsmål.

Med denne moderne såkaldt formalistiske opfattelse af matematik handler matematik altså ikke længere om den ideelle eller abstrakte virkelighed. Nej dens objekter er udefinerede, og dens aksiomer er principielt vilkårligt valgt. ■

Om forfatteren
Jesper Lützen er docent ved
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
Tlf.: 353 20741
E-mail: lutzen@math.ku.dk

Videre læsning:
En mere udførlig behandling af emnet for denne artikel kan findes i:
Jesper Lützen: Geometri og Ølkrus – de to revolutioner i matematikkens metodik og genstandsområde i »Matematikken og Verden« redigeret af Mogens Niss, København, Fremads Forlag, 2001, s. 99-126.